Banque d'épreuves Archimède

CONCOURS 1998

Option : PC

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Les différentes parties du problème sont dans une large mesure indépendantes, exceptée la partie V qui utilise les résultats de la partie IV

DEFINITIONS et NOTATIONS

On désigne par $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{B}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ des fonctions numériques continues et bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme : $\forall\ f \in \mathscr{B},\ \|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$. E_n est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier de $\mathbb{N}$.

Pour tout p entier naturel inférieur ou égal à n, on définit f_p par : $x \longrightarrow f_p(x) = x^p$.

On notera $\Phi_n = (f_0, f_1, ..., f_n)$ la base canonique de E_n.

Pour $a > 0$, on appelle moyenne spatiale de paramètre a de $f \in \mathscr{E}$, l'application $m_a(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ m_a(f)(x) = \dfrac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$.

I - ETUDE ANALYTIQUE

1. a - Pour $f \in \mathscr{E}$, calculer la dérivée de $m_a(f)$.
1. b - Montrer que $\forall\ f \in \mathscr{E}$, $m_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in \mathscr{E}$.
Montrer que $m_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $T = 2a$.

3. Etudier la parité de $m_a(f)$ en fonction de celle de f.

4. Etudier la monotonie de $m_a(f)$ lorsque f est monotone.

5. $f \in \mathscr{E}$ est dite à support borné s'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

a - Montrer que si f est à support borné, $m_a(f)$ l'est aussi.

b - Montrer que si f vérifie : $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$, alors $\int_{-A-a}^{A+a} m_a(f)(t)dt = \int_{A}^{A} f(t)\,dt$.

(On pourra utiliser une intégration par parties).

II - ETUDE DE NORME SUR $\mathscr{B}$

1. On considère les fonctions f, g et h de $\mathscr{B}$ définies par :

$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $h(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Calculer $\|f\|, \|g\|, \|h\|, \|m_a(f)\|, \|m_a(g)\|$ et $\|m_a(h)\|$.

2. Montrer que $\forall f \in \mathscr{B}$, $\|m_a(f)\| \leq \|f\|$.

3. On pose $N(m_a) = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathscr{B}}} \|m_a(f)\|$. Déterminer $N(m_a)$.

III - ETUDE ALGEBRIQUE

1. a - Montrer que m_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
   b - Déterminer $\operatorname{Ker} m_a$.
   c - m_a est-il surjectif ?

On notera encore m_a la restriction de m_a à E_n.

2. a - Montrer que E_n est stable par m_a.
   b - Prouver que la matrice de m_a dans la base Φ_n est triangulaire supérieure.
   c - Montrer que le polynôme caractéristique de m_a est $P_c(x) = (1 - x)^n$.

3. On suppose dans cette question $n \geq 2$.
   a - Soit $f \in E_n$. Montrer que si $d°f = 2$, f n'est pas vecteur propre de m_a.
   b - On appelle F une primitive de f, $f \in E_n$.
   Montrer que f est vecteur propre de m_a si et seulement si
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x + a) - F(x - a) = 2a\,f(x)$
   c - En déduire que si f est vecteur propre de m_a, f ' l'est aussi.
   d - Montrer que le sous-espace propre de m_a est E_1.

IV - POLYNÔMES DE TCHÉBYCHEV

On appelle polynômes de Tchébychev la suite de polynômes définis par :

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \frac{x}{a}$, et $\forall p \geq 2$ $T_p(x) = \frac{2x}{a} T_{p-1}(x) - T_{p-2}(x)$.

1. a - Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $T_p(a \cos x) = \cos px$
   b - Calculer $T_p(0)$ et $T'_p(a)$
   c - Etudier la parité du polynôme T_p.

2. a - Déterminer le coefficient dominant de T_p (x)

b - Montrer que $T_p^{(p-1)}(a) = \left(\frac{2}{a}\right)^{p-1} p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

V- MOYENNE SPATIALE DE (T_p)

1. Calculer $m_a(T_p)(0)$ en fonction de p.

2. a- Déterminer $[m_a(T_p)]'(0)$ et $[m_a(T_p)]''(0)$ en fonction de p.

b - Montrer que $[m_a(T_p)]^{(p)}(0) = \frac{1}{a} T^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1} p!}{a^p}$.

3. Déduire des résultats précédents :

a - Le développement limité à l'ordre 2 de $m_a(T_p)$ en 0 pour $p \geqslant 2$.
b - un équivalent de $m_a(T_p)$ (x) lorsque x tend vers l'infini.

VI - ETUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

On étudie le cas $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on pose $\mu_n = m_{\frac{1}{n}}$.

1. Pour $f \in \mathscr{E}$, montrer que la suite $(\mu_n(f))$ converge vers f (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis ou l'égalité $f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(x)\, dt$).

2. Soit $f \in \mathscr{E}$ 2π-périodique.

On suppose que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|x - t| < \eta$ alors $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$

a - Montrer que la suite $(\mu_n(f))$ converge uniformément vers f.

b - $c_p(f)$ et $c_p(\mu_n(f))$ désignent les coefficients de Fourier exponentiels de f et $\mu_n(f)$.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $c_p(\mu_n(f)) = \frac{n}{p} \sin\frac{p}{n} c_p(f)$.

Montrer que $c_0(\mu_n(f)) = c_0(f)$. (On pourra éventuellement utiliser le théorème de Fubini).

c - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $(P_{n,k})$ la suite de polynômes trigonométriques d'ordre k définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n,k}(x) = c_0(f) + \sum_{\substack{p=-k \\ p \neq 0}}^{k} \frac{n}{p} \sin\frac{p}{n}\, c_p(f)\, e^{ipx}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $\lim_{k \to \infty} P_{n,k}(x)$.

d - Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists (N,K) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant :
$\forall k \geqslant K$, pour tout x réel, $|f(x) - P_{N,k}(x)| < \varepsilon$.